Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

In einem Quadrat sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel betragen 90°
Für die bekannten Seitenlängen des Grundrisses der Pyramide gilt:

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{24^2 + 7^2 + 0^2} = 25$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2 + 0^2} = 25$$

Für den Winkel β bei B gilt :

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0}{\sqrt{625} \cdot \sqrt{625}} = 0$$

und daraus folgt $\beta = 90°$

Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sind also gleich lang und schließen einen rechten Winkel ein, die Punkte A, B und C könnten also die Eckpunkte eines Quadrates sein.

Der Flächeninhalt dieses Quadrats wäre

$$A_{Quadrat} = 25m \cdot 25m = 625m^2$$

Da die Seite $\overline{AD}$ parallel zur Seite $\overline{BC}$ sein müsste, gilt für den Ortsvektor des Punktes D :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt D hätte somit die Koordinaten D(-7 | 24 | 0)

Lösung zur Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Neben den Koordinaten der Grundfläche der Pyramide sind die Punkte E und F auf den Seitenkanten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$ gegeben. Die Spitze der Pyramide entspricht dem Schnittpunkt der Geraden durch A und E bzw. durch B und F.

$$g_{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1,7 \\ 3,1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_{BF} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9,3 \\ 5,1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1,7 \\ 3,1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9,3 \\ 5,1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Beachte :

.Das Gleichungssystem besteht aus 3 Gleichungen aber nur 2 Unbekannten. Es ist also überbestimmt. Ein solches Gleichungssystem löst man, indem man mit Hilfe von zwei der drei Gleichungen eine Lösung bestimmt, deren Gültigkeit dann mit der dritten Gleichung überprüft wird.

Damit erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcrcr} \text{I} & 1,7r & + & 9,3s & = & 24 \\ \text{II} & 3,1r & - & 5,1s & = & 7 \\ \text{III} & 3r & - & 9s & = & 0 \end{array}$$

Die dritte Gleichung kann man vereinfachen, in dem man beide Seiten durch 3 dividiert. Also

$$\text{III} \quad r - 3s = 0 \quad \text{und daraus folgt} \quad r = 3s$$

Mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens folgt aus der zweiten Gleichung

$$3,1 \cdot 3s - 5,1s = 7$$
$$4,2s = 7$$
$$s = \frac{7}{4,2} = \frac{70}{42} = \frac{5}{3}$$

und damit $r = 3s = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$

Überprüfung dieser Lösung mit Hilfe der Gleichung (I) ergibt

$$1,7 \cdot 5 + 9,3 \cdot \frac{5}{3} = 8,5 + 15,5 = 24$$

und damit die Gültigkeit der Lösung für das gesamte Gleichungssystem.

Mit r = 5 bzw. $s = \frac{5}{3}$ kann der Ortsvektor des Schnittpunkts der beiden Geraden berechnet werden.

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1,7 \\ 3,1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} -9,3 \\ 5,1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 15,5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden und somit die Spitze der Pyramide liegt damit bei S(8,5 | 15,5 | 15). Die Pyramide hatte also ursprünglich eine Höhe von 15 m.

Lösung zur Teilaufgabe 2 (5 BE)

Da die Sonnenstrahlen sich geradlinig ausbreiten, kann der Verlauf des Schattens der Pyramidenspitze durch eine Gerade beschrieben werden, die durch S geht und den Vektor der Sonnenstrahlen als Richtungsvektor besitzt.

$$g_{Schatten} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 15,5 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4,8 \\ -1,4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Opferplatz liegt in der Pyramidengrundebene und damit in der x-y-Ebene. Um die Koordinaten des Mittelpunkts M des Opferplatzes zu finden, muss also der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Koordinatenebene bestimmt werden.

Für alle Punkte der xy-Ebene ist z = 0.

Daraus ergibt sich $0 = 15 - 3t$

und damit $t = 5$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 15,5 \\ 15 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -4,8 \\ -1,4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15,5 \\ 8,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt des Opferplatzes hat also die Koordinaten M(-15,5 | 8,5 | 0)

Lösung zur Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Die Ebenengleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8{,}5 \\ -15{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat den Aufhängepunkt C der Pyramide. Die beiden Richtungsvektoren werden durch die Vektoren

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 15{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8{,}5 \\ -15{,}5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und $$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gebildet. Die gesuchte Pyramidenebene enthält also die Punkte B, C und S.

Lösung zur Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Im abgebildeten Kästchen werden die Skalarprodukte der Richtungsvektoren der Ebene E mit einem Vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} 144 \\ 42 \\ 125 \end{pmatrix}$ gebildet.

Da beide Skalarprodukte den Wert 0 ergeben, ist der Vektor $\vec{h}$ senkrecht zu den Richtungsvektoren der Ebene E und somit ein Normalenvektor dieser Ebene.

Beachte :

Gilt für 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

so sind die beiden Vektoren senkrecht (orthogonal) zueinander

Lösung zur Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Mit dem Skalarprodukt ergibt sich für den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{h}$ und $\vec{r}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}144\\42\\125\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}42\\-144\\125\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}144\\42\\125\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}42\\-144\\125\end{pmatrix}\right|} = \frac{125^2}{38125} = \frac{25}{61} \approx 0,4098$$

daraus folgt $\varphi \approx 65,8°$

Geometrische Interpretation : Der Winkel zwischen beiden Vektoren beträgt ungefähr 65,8°. Da Vektor $\vec{h}$ senkrecht auf der Pyramidenfläche BCS und Vektor $\vec{r}$ senkrecht auf der Pyramidenfläche ABS (laut Aufgabe) steht, entspricht der Winkel zwischen den beiden Vektoren dem Schnittwinkel zwischen den Pyramidenflächen BCS und ABS.